EXERCICES SUR LES NOMBRES RÉELS

Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que A et $\complement_{\mathbb{R}} A$ soient des ouverts de $\mathbb{R}$.

a) Démontrer par l'absurde que A n'est pas majorée.

b) Supposons que $\complement_{\mathbb{R}} A \neq \emptyset$ et soit $x \in \complement_{\mathbb{R}} A$. Soit $B = \{t \in A \,/\, x \leq t\}$, montrer que B est non vide et admet une borne inférieure m telle que $m > x$.

c) Démontrer que $m \notin A$ et $m \notin \complement_{\mathbb{R}} A$. En déduire que $A = \mathbb{R}$.

On vient de démontrer que $\mathbb{R}$ est <u>connexe</u>.

---

a) Si A était majoré, étant non vide, A admettrait une borne supérieure m.

↗ $m \in A \underset{A \text{ ouvert}}{\Longrightarrow} \exists I \in \mathcal{V}(m) \quad m \in I \subset A$ absurde (car $m+\varepsilon \notin A \quad \forall \varepsilon > 0$)

↘ $m \in \complement A \underset{\complement A \text{ ouvert}}{\Longrightarrow} \exists I \in \mathcal{V}(m) \quad m \in I \subset \complement A$ absurde (car $m = \operatorname{Sup} A$ donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad m - \varepsilon < a \leq m$)

Il y a absurdité dans les 2 cas. <u>Donc A n'est pas majoré</u>.

b) * $B = \emptyset \Rightarrow \forall a \in A \quad a < x \Rightarrow A$ majoré par x, absurde d'après a)

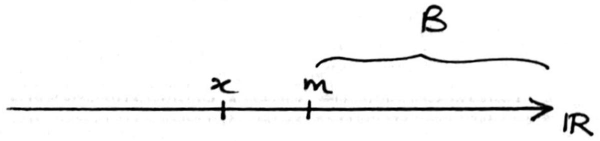
<u>D'où $B \neq \emptyset$</u>.

* $B \neq \emptyset$ est minoré (par x) donc admet une borne inférieure $m = \operatorname{Inf} B$.

x est un minorant de B donc $m \geq x$.

Si $m = x$, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists t \in B \subset A \quad x \leq t < x + \varepsilon$ mais $x \in \complement A$ et $\complement A$ est ouvert, c'est absurde. <u>Donc $m > x$</u>.

c)



2 cas possibles :

↗ $m \in A \underset{A \text{ ouvert}}{\Longrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad]m-\varepsilon, m+\varepsilon[\subset A$ en contradiction avec $m = \operatorname{Inf} B$ (qui implique $x \leq t < m \Rightarrow t \in \complement A$)

↘ $m \in \complement A \underset{\complement A \text{ ouvert}}{\Longrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad]m-\varepsilon, m+\varepsilon[\subset \complement A$ ce qui est absurde car $m = \operatorname{Inf} B$ donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in B \subset A \quad m \leq a < m + \varepsilon$

<u>Ccl</u> : L'hypothèse $\complement A \neq \emptyset$ du b) est fausse, donc $A = \mathbb{R}$. QED

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Mq $\quad Sup\{c \in \mathbb{N} \,/\, 2c < d\} = E\left(\frac{d-1}{2}\right)$

Si $m = Sup\{c \in \mathbb{N} \,/\, 2c < d\}$, on a :

$$\begin{cases} m = E\left(\frac{d}{2}\right) \text{ si } \frac{d}{2} \notin \mathbb{N} \\ m = E\left(\frac{d}{2}\right) - 1 \text{ si } \frac{d}{2} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1er cas : Si $\frac{d}{2} \notin \mathbb{N}$, $d = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$m \leq \frac{d}{2} < m+1 \Rightarrow m \leq k + \frac{1}{2} < m+1 \Rightarrow m - \frac{1}{2} \leq k = \frac{d-1}{2} < m + \frac{1}{2} \quad (1)$$

m est un entier, et k est entier et $m \leq k + \frac{1}{2}$ donc $m \leq k$ (2)

(1) et (2) entraînent $m \leq k < m+1$ soit $m = E\left(\frac{d-1}{2}\right) = k$.

2^e^ cas : Si $\frac{d}{2} \in \mathbb{N}$, $d = 2k$ où $k \in \mathbb{N}$ d'où $m = k-1$.

Par suite $\frac{d-1}{2} = k - \frac{1}{2} \Rightarrow E\left(\frac{d-1}{2}\right) = k-1$.

CQFD

a) Soient A et B des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, montrer que $A \subset B$ implique $\bar{A} \subset \bar{B}$

b) Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $F = \{ \theta q \ / \ q \in \mathbb{Q} \}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

c) En déduire que $E = \{ p + \theta q \ / \ (p,q) \in \mathbb{Q}^2 \}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

---

a) $x \in \bar{A} \iff \forall I$ int. ouvert contenant x $\quad I \cap A \neq \emptyset$

Si $A \subset B$, à fortiori $I \cap B \neq \emptyset$ d'où $x \in \bar{B}$. D'où $\bar{A} \subset \bar{B}$.

b) * $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, si nous supposons $\theta > 0$:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists q \in \mathbb{Q} \qquad \left| \frac{x}{\theta} - q \right| < \frac{\varepsilon}{\theta}$ d'où $|x - \theta q| < \varepsilon$

ce qui montre que $F = \{ \theta q \ / \ q \in \mathbb{Q} \}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

* On peut toujours supposer $\theta > 0$ car $\{ \theta q / q \in \mathbb{Q} \} = \{ -\theta q / q \in \mathbb{Q} \}$.

c) On a $F \subset E \subset \mathbb{R}$ d'où $\underset{\mathbb{R}}{\underset{\shortparallel}{\bar{F}}} \subset \bar{E} \subset \mathbb{R}$ ie $\bar{E} = \mathbb{R}$.

(réf. TD Analyse Deug 1re année 91-92 et 92-93)

Soit $A = \left\{ \frac{n}{nm+1} \ / \ m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

a) Mq $A \subset]0,1[$

b) Vérifier que $\overline{A} = A \cup \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{p} \ / p \in \mathbb{N}^* \right\}$

---

a) Si $m, n \in \mathbb{N}^*$, alors $\frac{n}{nm+1} > 0$, et l'on a :

$$\frac{n}{nm+1} < 1 \iff 0 < n(m-1)+1$$

Cette dernière affirmation est triviale, donc $A \subset]0,1[$

2° solution : $\frac{n}{nm+1} = \frac{1}{m+\frac{1}{n}} < \frac{1}{m} < 1$ bien sûr !

b) On sait que $A \subset \overline{A}$.

* $0 \in \overline{A}$ car, si $n=1$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{m+1} \in A \quad \text{et} \quad \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{m+1} = 0$$

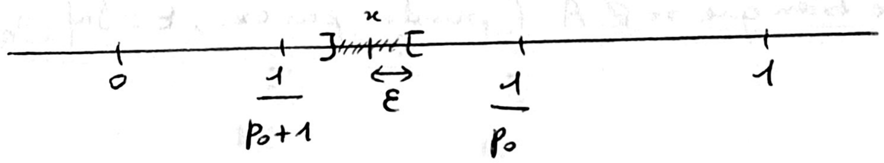
* $\frac{1}{p} \in \overline{A}$, où $p \in \mathbb{N}^*$, puisque si $m=p$:

$$\frac{n}{np+1} \in A \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{np+1} = \frac{1}{p}$$

* Montrons enfin que tout point $x \notin A \cup \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{p} \ / p \in \mathbb{N}^* \right\}$ n'est pas une valeur d'adhérence de A.

C'est trivial lorsque $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. Reste à le vérifier lorsque $x \in]0,1[$. On doit trouver $\varepsilon > 0$ tq :

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A = \emptyset$$



Il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\dfrac{1}{p_0+1} < x < \dfrac{1}{p_0}$

Quels sont les nombres $\dfrac{n}{nm+1}$ compris entre $\dfrac{1}{p_0+1}$ et $\dfrac{1}{p_0}$?

$$(*) \quad \frac{1}{p_0+1} < \frac{n}{nm+1} < \frac{1}{p_0} \iff \begin{cases} nm+1 < n(p_0+1) \\ np_0 < nm+1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 < n(p_0-m+1) \\ n(p_0-m) \leq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} p_0-m+1 > 1 \text{ ou } (p_0-m+1=1 \text{ et } n>1) \\ \text{et} \\ p_0 \leq m \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} p_0 > m \text{ ou } (p_0 = m \text{ et } n>1) \\ \text{et} \\ p_0 \leq m \end{cases}$$

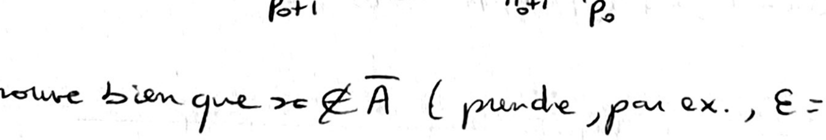
$$\iff p_0 = m \text{ et } n > 1$$

Tous les éléments de A strictement compris entre $\dfrac{1}{p_0+1}$ et $\dfrac{1}{p_0}$ sont donc les $a_n \doteq \dfrac{n}{np_0+1}$ avec $n>1$.

La fonction $f(x) = \dfrac{x}{xp_0+1}$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{(xp_0+1)^2}$ positive, est strictement croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{p_0}\}$, et donc (a_n) sera strictement croissante. On pose $a_1 \doteq \dfrac{1}{p_0+1}$. Il existera $n_0 \in \mathbb{N}$ tq :

$$n_0 = \operatorname{Sup} \{ n \in \mathbb{N} \ / \ a_n < x \}$$

et alors : $\quad a_{n_0} < x < a_{n_0+1} \quad$ et $\quad]a_{n_0}, a_{n_0+1}[\cap A = \emptyset$



ce qui prouve bien que $x \notin \overline{A}$ (prendre, par ex., $\varepsilon = \operatorname{Inf}(a_{n_0+1} - x, x - a_{n_0})$)

CQFD

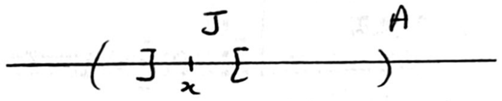
A désigne un ouvert de $\mathbb{R}$.
Montrer que $\forall B \subset \mathbb{R}$ $\quad A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

Si $x \in A \cap \overline{B}$, soit I un intervalle ouvert contenant x. Il s'agit de prouver que

$$I \cap A \cap B \neq \emptyset$$

pour conclure à $x \in \overline{A \cap B}$.

$x \in A$ et A est ouvert, donc il existe un intervalle ouvert J contenant x et inclus dans A. Soit $x \in J \subset A$.

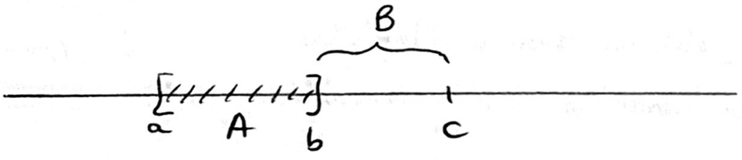


On a : $\quad I \cap J \cap B \subset I \cap A \cap B \quad (*)$

$I \cap J$ sera un intervalle ouvert contenant x, donc $x \in \overline{B}$ assure que $(I \cap J) \cap B \neq \emptyset$, et $(*)$ entraîne à fortiori $I \cap A \cap B \neq \emptyset$.

CQFD

NB : L'hypothèse "A ouvert" est importante.
Contre-ex : $A = [a, b]$
$B =]b, c[$



$A \cap \overline{B} = \{b\}$ n'est pas inclus dans $\overline{A \cap B} = \emptyset$.

(réf. TD Deug 1ère année, Analyse 93-94)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide. On définit une relation sur A par :

$$x \mathcal{R} y \iff \begin{cases} x \leq y \text{ et } [x,y] \subset A \\ \text{ou} \\ y \leq x \text{ et } [y,x] \subset A \end{cases}$$

a) Montrer que c'est une relation d'équivalence dont les classes sont des intervalles

b) Prouver que la classe de x est un intervalle ouvert si A est ouvert.

c) En déduire que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts.

---

a) * C'est trivialement une rel. d'é.

* Soient $\alpha, \beta \in \dot{x}$. Par transitivité $\alpha \equiv \beta$ donc $[\alpha,\beta] \subset A$.

Il faut montrer :

$$t \in [\alpha,\beta] \overset{?}{\Longrightarrow} [t,x] \subset A \quad (\text{ie } t \in \dot{x})$$

$$\Downarrow [\alpha,\beta]\subset A$$

$$\begin{cases} [t,\alpha] \subset A \\ [t,\beta] \subset A \end{cases} \Longrightarrow \quad [\alpha,x] \subset A \text{ car } \alpha \in \dot{x}, \quad [\beta,x] \subset A \text{ car } \beta \in \dot{x}$$

NB : Ici, $[\alpha,\beta]$ désigne l'intervalle $[\alpha,\beta]$ si $\alpha \leq \beta$ ou l'intervalle $[\beta,\alpha]$ si $\beta \leq \alpha$

pour constater : $\forall \alpha, \beta \in \dot{x} \quad [\alpha,\beta] \subset \dot{x}$

ie $\dot{x}$ est un intervalle.

b) Si A est ouvert, supposons par l'absurde que :

$$\dot{x} = (\alpha, \beta] \quad \text{soit fermé en } \beta$$

$$\beta \in A \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad]\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon[\subset A \Rightarrow \beta + \frac{\varepsilon}{2} \in \dot{x} \quad \text{absurde !}$$

Donc $\dot{x}$ est un intervalle ouvert, quel que soit $x \in A$.

c)

$$\varphi : \mathbb{Q} \cap A \longrightarrow A/\mathcal{R}, \quad r \longmapsto \dot{r}$$

est surjective car si $\dot{x} \in A/\mathcal{R}$, $\dot{x}$ est un intervalle ouvert non vide, donc contient au moins un rationnel r, et $\dot{x} = \dot{r} = \varphi(r)$.

$\mathbb{Q} \cap A$ est au plus dénombrable et φ est surjective. On en déduit que $A/\mathcal{R}$ est au plus dénombrable (Ramis I.1.4.3 Pro III, ou [T] ens. dénombrables)

Donc :

$$A = \dot{\bigcup_{\dot{x} \in A/\mathcal{R}}} \dot{x}$$

est réunion disjointe, dénombrable au plus, d'intervalles ouverts

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

a) On suppose que A et B sont majorés. Mq $\mathrm{Sup}(A+B) = \mathrm{Sup}\,A + \mathrm{Sup}\,B$

b) On suppose toujours que A et B sont majorés, mais $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+$.

Mq $\mathrm{Sup}(A\times B) = \mathrm{Sup}\,A \,.\, \mathrm{Sup}\,B$

($A+B$ et $A\times B$ sont définis de façon naturelle)

---

a) Posons $m_A = \mathrm{Sup}\,A$ et $m_B = \mathrm{Sup}\,B$

<u>1re solution</u> : Pour tout $a \in A$ et $b \in B$, $a+b \leq m_A + m_B$ donc $m_A + m_B$ est un majorant de $A+B$. Si x est un autre majorant de $A+B$:

$\forall a \in A \quad \forall b \in B \qquad a+b \leq x \Rightarrow a \leq x-b \Rightarrow m_A \leq x-b$

Ainsi : $\forall b \in B \quad b \leq x - m_A$

d'où l'on déduit $m_B \leq x - m_A$ puis $m_A + m_B \leq x$.

$m_A + m_B$ sera donc bien le plus petit majorant de $A+B$.

<u>2e solution</u> : On utilise la caractérisation

$$m = \mathrm{Sup}\,X \iff \begin{cases} \forall x \in X & x \leq m \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X & m - \varepsilon < x \leq m \end{cases}$$

$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a+b \leq m_A + m_B$ est trivial.

Par hypothèse : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad m_A - \frac{\varepsilon}{2} < a \leq m_A$

$\exists b \in B \quad m_B - \frac{\varepsilon}{2} < b \leq m_B$

$$m_A + m_B - \varepsilon < a+b \leq m_A + m_B$$ et c'est fini !

<u>3e solution</u> :

On vérifie d'abord avec $A = \{a\}$ que $\mathrm{Sup}(a+B) = a + \mathrm{Sup}\,B$. $a + \mathrm{Sup}\,B$ étant clairement un majorant de $a+B$, on a : $\mathrm{Sup}(a+B) \leq a + \mathrm{Sup}\,B$. Il suffit d'appliquer cette inégalité à $a' = -a$ et $B' = a+B$ pour obtenir l'inégalité inverse.

Cas général : $\mathrm{Sup}\,A + \mathrm{Sup}\,B$ est un majorant de $A+B$ et si M est un autre majorant, on a $\forall (a,b) \in A\times B \quad M \geq a+b \Rightarrow M \geq \mathrm{Sup}_{a\in A}(a+b) = \mathrm{Sup}(A+b)$
$= \mathrm{Sup}\,A + b$.

Ainsi $\forall b \in B \quad M \geq \mathrm{Sup}\,A + b$ donc $M \geq \mathrm{Sup}_{b \in B}(\mathrm{Sup}\,A + b) = \mathrm{Sup}(\mathrm{Sup}\,A + B)$
$= \mathrm{Sup}\,A + \mathrm{Sup}\,B$. CQFD

(réf. TD Analyse DEUG 1re année 91-92 et 92-93)

b) $\hat{M}$ raisonnements qu'au a), en constatant d'abord que :

Si $A=\{0\}$ ou $B=\{0\}$, l'égalité proposée est triviale

On peut donc supposer $A\neq\{0\}$ et $B\neq\{0\}$, d'où $m_A>0$ et $m_B>0$.

1° solution :

* $\forall a\in A \quad \forall b\in B \qquad ab\leq m_A.m_B$ donc $m_A.m_B$ est un majorant de $A\times B$.
* Si x est un autre majorant de $A\times B$, on a :

$$\forall a\in A \quad \forall b\in B \qquad a.b\leq x$$

$$\text{d'où } \forall a\ \forall b \quad a\leq \frac{x}{b} \Rightarrow \forall b \quad m_A\leq\frac{x}{b} \Rightarrow \overbrace{\forall b \quad b\leq\frac{x}{m_A}}^{(*)} \Rightarrow m_B\leq\frac{x}{m_A}$$

(NB : on a supposé $b\neq0$ pour diviser par b, mais cela ne pose pas de problème car l'inégalité (*) est triviale si $b=0$)

Finalement $m_A m_B\leq x$ est le plus petit majorant de $A\times B$.

2° solution : $m_A.m_B$ est clairement un majorant de $A\times B$. De plus :

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists a\in A \qquad m_A-\varepsilon<a\leq m_A$$
$$\exists b\in B \qquad m_B-\varepsilon<b\leq m_B$$

$$(m_A-\varepsilon)(m_B-\varepsilon)<ab\leq m_A m_B \qquad \text{(pour } \varepsilon \text{ suffisamment petit)}$$

soit : $\quad m_A m_B-(m_A+m_B)\varepsilon<(m_A-\varepsilon)(m_B-\varepsilon)<ab\leq m_A m_B$

ce qui achève la démonstration puisque $(m_A+m_B)\varepsilon$ peut être rendu aussi petit que l'on veut en agissant sur ε.

3° solution : Reprendre la 3° sol. du a).